



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Η χρήση πολλαπλών κεραιών και η σημασία του ραδιοδιαύλου: Από το διαφορισμό στη χωρική πολυπλεξία

Αθανάσιος Κανάτας
Αναπληρωτής Καθηγητής

Δομή της παρουσίασης

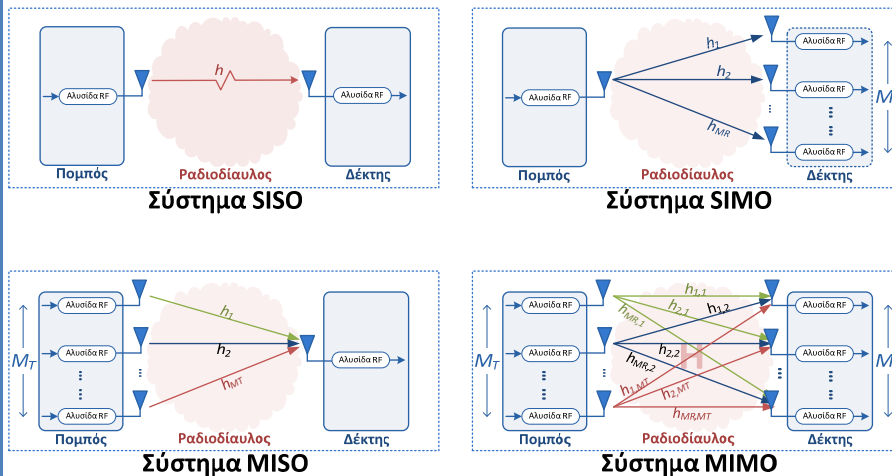
2

- **Τεχνικές Διαφορισμού**
 - Η μετάβαση από τα συστήματα SISO στα συστήματα SIMO και MISO.
 - Τεχνικές και κέρδη.
- **Συστήματα MIMO**
 - Βασικές αρχές συστημάτων MIMO.
 - Κέρδη από τη χρήση πολλαπλών κεραιών.
 - Η έννοια των παράλληλων διαύλων.
 - Τεχνικές Ανάκτησης
- **Χωρητικότητα Συστημάτων SISO-SIMO-MISO-MIMO**
 - Βασικές εξισώσεις και μεγέθη χωρητικότητας συστημάτων.

Συστήματα με πολλαπλές κεραιές

3

Συστήματα MIMO



4

Οι τεχνικές διαφορισμού

Η μετάβαση από τα συστήματα SISO στα συστήματα SIMO και MISO.

Τεχνικές και κέρδη.

Διαφορισμός (Diversity)

5

- **Κίνητρο:** Τα σήματα στα συστήματα κινητών επικοινωνιών με επίπεδες διαλείψεις υποφέρουν από βαθιές διαλείψεις.
- **Ιδέα:** Αν χρησιμοποιήσουμε διαφορετικές εκδόσεις του σήματος, που λαμβάνονται/στέλνονται από **ασυσχέτιστες διαδρομές** (υπόκεινται δηλαδή σε **ανεξάρτητες διαλείψεις**), η πιθανότητα να βρεθούν ταυτόχρονα σε βαθιές διαλείψεις μειώνεται.
- Τα σήματα **συνδυάζονται κατάλληλα** ώστε να έχουμε **μικρότερη πιθανότητα σφάλματος**, και άρα **μεγαλύτερη αξιοπιστία μετάδοσης**.

Διαφορισμός (Diversity)

6

- Η ιδέα του διαφορισμού μπορεί να εφαρμοσθεί:
 - Στο χώρο
 - Στον χρόνο (διεμπλοκή & κωδικοποίηση)
 - Στη συχνότητα
 - Στην καθυστέρηση (δέκτης RAKE)
 - Στην πόλωση
 - Στην κατεύθυνση αναχώρησης/άφιξης των σημάτων στον πομπό/δέκτη
- Εδώ μας ενδιαφέρει κυρίως ο **διαφορισμός χώρου**
 - Στο **δέκτη** (Receive Diversity - **SIMO**)
 - Στον **πομπό** (Transmit Diversity - **MISO**)
 - Σε **πομπό και δέκτη** (**MIMO**)

Χωρικός Διαφορισμός

7

- Για συνθήκες σκέδασης όπου ισχύει η **παραδοχή Clarke** (όλα τα κύματα καταφθάνουν με την ίδια πιθανότητα από κάθε γωνία φ στο επίπεδο x - y , δηλ. η $APS(\varphi)$ είναι η **ομοιόμορφη**), η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης χώρου δίνεται από την

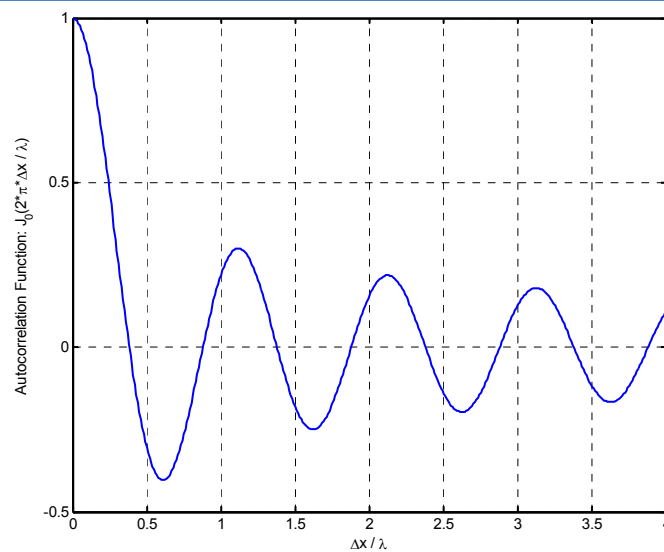
$$R_H(\Delta x) = J_0\left(2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}\right)$$

Bessel Μηδενικής
τάξης Πρώτου
είδους

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \cos(\varphi)) d\varphi$$

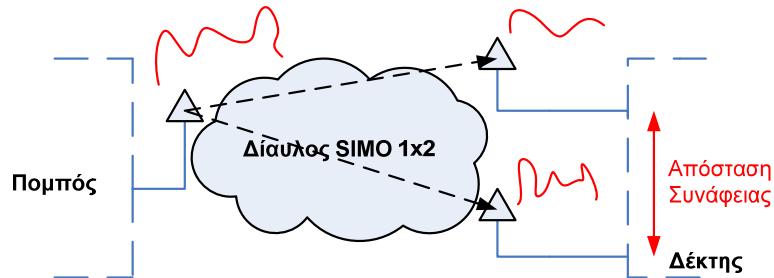
Χωρικός Διαφορισμός

8



Χωρικός Διαφορισμός στο Δέκτη

9



- Η απόσταση μεταξύ των κεραιών στο δέκτη είναι τουλάχιστο ίση με την **απόσταση συνάφειας (coherent distance)**. Τότε ο δέκτης μπορεί να λάβει N_r φορές το ίδιο σήμα.
- **Don't put all your eggs in one basket!**

Χωρικός Διαφορισμός

10

- Έστω p η πιθανότητα η ισχύς του σήματος στο δέκτη να είναι κάτω από ένα προκαθορισμένο επίπεδο στην περίπτωση SISO διαύλου (πιθανότητα να έχω βαθιές διαλείψεις).
- Για δίαυλο SIMO, η πιθανότητα η ισχύς του σήματος που λαμβάνεται σε N_r θέσεις να είναι ταυτόχρονα κάτω από το ίδιο επίπεδο είναι: p^{N_r}
- Άρα η **τάξη του διαφορισμού** είναι: N_r
- Με διαφορισμό σε πομπό και δέκτη για τη μέγιστη τάξη ισχύει:

$$\boxed{(\text{Diversity Order})_{\max} = N_t N_r}$$

Διαφορισμός & Πιθανότητα Σφάλματος

11

- Σε μια γενική περίπτωση με διαφορισμό με L κλάδους η πιθανότητα σφάλματος είναι της μορφής

$$p_e \approx c \cdot SNR^{-L}$$

Καθορίζει το κέρδος κωδικοποίησης

Καθορίζει το κέρδος διαφορισμού

Χωρικός Διαφορισμός

12

- Ο όρος **τάξη διαφορισμού** γίνεται περισσότερο αντιληπτός αν δούμε τη σχέση πιθανότητας διακοπής με το SNR **σε λογαριθμική κλίμακα**: η πιθανότητα διακοπής με τάξη διαφορισμού N_r **φθίνει N_r φορές πιο γρήγορα** με την αύξηση του SNR σε σχέση με τη περίπτωση ενός και μόνο κλάδου λήψης (χωρίς διαφορισμό).
- **Η τάξη διαφορισμού είναι μια ιδιότητα του διαύλου**, όχι του τρόπου μετάδοσης. Βέβαια υπάρχουν άλλοι τρόποι μετάδοσης που επιτρέπουν την εκμετάλλευση της υπάρχουσας τάξης διαφορισμού και άλλοι όχι.

Πιθανότητα Σφάλματος σε AWGN

13

- Η βάση σύγκρισης είναι πάντα ο **δίαυλος AWGN**. Υποθέτουμε επιπλέον, BPSK

$$y = x_i + n \quad i = 1, 2$$

- Το BPSK είναι antipodal: $x_i = \pm a$
- Η πιθανότητα σφάλματος μειώνεται εκθετικά με το SNR

$$P[\mathcal{E}] = p_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_o}}\right) = Q(\sqrt{2\text{SNR}}) \quad \left(\text{SNR} = \frac{E_s}{N_o} = \frac{a^2}{N_o}\right)$$

Πιθανότητα Σφάλματος σε Διαλείψεις

14

- Στην περίπτωση **επίπεδων διαλείψεων τύπου Rayleigh** το λαμβανόμενο σήμα είναι

$$y = hx + n$$

- Η κρουστική απόκριση του διαύλου είναι i.i.d. μιγαδική Gauss τ.μ. με μηδενική μέση τιμή και με διασπορά $E\{|h|^2\} = 1$ $h \sim CN(0,1)$
- Άρα $\text{Re}[h]$ και $\text{Im}[h]$ έχουν μηδενική μέση τιμή και ίδια διασπορά ίση με 1/2.
- Άρα **το πλάτος** του h ακολουθεί την **Rayleigh**, ενώ η **φάση** του θα ακολουθεί την **ομοιόμορφη**.

Πιθανότητα Σφάλματος σε Διαλείψεις

15

- Αν υποθέσουμε BPSK (αντιποδικά σήματα $x_i = \pm a$) εξαιτίας της τυχαίας φάσης του h , **δεν είναι δυνατή η ασύγχρονη ανάκτηση** (δηλαδή χωρίς γνώση του h) της πληροφορίας ακόμη και απουσία θορύβου.
- Αποδεικνύεται ότι μόνο κάποια κωδικοποίηση (π.χ. στο χρόνο) μπορεί να βοηθήσει στην ανάκτηση (π.χ. με ορθογωνικά σήματα και δέκτη ενέργειας ή τετραγωνικού νόμου). Σε αυτή την περίπτωση

$$P[\mathcal{E}] = p_e = \frac{1}{2(1 + \text{SNR})} \quad \left(\text{SNR} = \frac{E_s}{N_o} = \frac{a^2}{2N_o} \right)$$

Πιθανότητα Σφάλματος σε Διαλείψεις

16

- Υποθέτουμε BPSK στον πομπό και **σύγχρονη αποδιαμόρφωση** στο δέκτη. Δηλαδή ο δίαυλος είναι μεν **τυχαίος αλλά γνωστός** στο δέκτη.
- Η γνώση προέρχεται από τη διαδικασία της εκτίμησης του διαύλου (channel estimation).
- Η ανάκτηση γίνεται με βάση την εξής **πραγματική επαρκή στατιστική**

$$r = \text{Re} \left[\frac{h^*}{|h|} y \right] = \text{Re} \left[|h| x + \frac{h^*}{|h|} n \right] = |h| x + z$$

- όπου $z \sim N(0, N_o / 2)$

Πιθανότητα Σφάλματος σε Διαλείψεις

17

- Αποδεικνύεται ότι η δεσμευμένη πιθανότητα σφάλματος δεδομένου του διαύλου h είναι

$$P[\mathcal{E} | h] = Q\left(\sqrt{2|h|^2 \text{SNR}}\right)$$

- Και η πιθανότητα σφάλματος ως μέση τιμή ως προς το δίαυλο

$$P[\mathcal{E}] = p_e = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\text{SNR}}{1 + \text{SNR}}} \right)$$

Πιθανότητα Σφάλματος σε Διαλείψεις

18

- Για υψηλές τιμές του SNR η ανάπτυξη σε σειρά Taylor δίνει

$$\sqrt{\frac{\text{SNR}}{1 + \text{SNR}}} = 1 - \frac{1}{2\text{SNR}} + O\left(\frac{1}{\text{SNR}^2}\right)$$

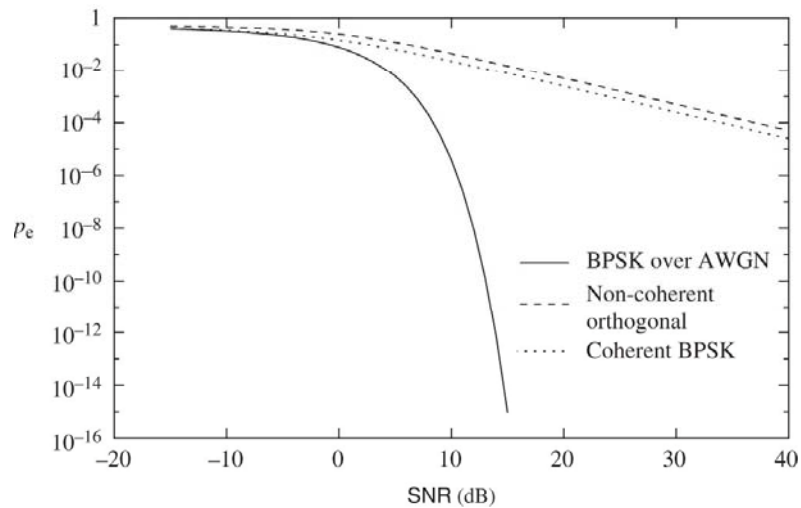
- Και η πιθανότητα γίνεται

$$P[\mathcal{E}] = p_e = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\text{SNR}}{1 + \text{SNR}}} \right) \approx \frac{1}{4\text{SNR}}$$

- Δηλαδή αντιστρόφως ανάλογη του SNR (που αντιστοιχεί σε AWGN).

Σύγκριση AWGN vs Rayleigh Fading

19



Διαφορισμός στο Δέκτη

20

- Ποια είναι όμως η πιθανότητα σφάλματος αν υποθέσουμε χωρικό διαφορισμό στο δέκτη, δηλαδή αν ο δέκτης μπορεί να λάβει N_r εκδοχές του σήματος?
- Πως εξαρτάται η πιθανότητα αυτή από τον τρόπο που συνδυάζουμε τις εκδοχές αυτές?
- Υπάρχει βέλτιστη τεχνική συνδυασμού των αποκρίσεων (σημάτων λήψης)?

Διαφορισμός στο Δέκτη

21

- Το κέρδος διαφορισμού εξαρτάται άμεσα από τον τρόπο που συνδυάζονται τα σήματα λήψης.
- Οι περισσότερες **τεχνικές συνδυασμού (combining techniques)** είναι γραμμικές: Το τελικό σήμα είναι ένας **γραμμικός συνδυασμός (weighted sum)** των διαφόρων σημάτων λήψης.
- Άρα το κάθε σήμα λήψης θεωρείται ότι έχει υποστεί ανεξάρτητες διαλείψεις και το τελικό σήμα που οδηγείται σε αποδιαμόρφωση, προκύπτει από γραμμικό συνδυασμό των επιμέρους σημάτων (ισοδύναμες εκφράσεις είναι οι “**fading paths**” και “**branches**”).

Διαφορισμός στο Δέκτη

22

- Παραδείγματα τεχνικών συνδυασμού στο δέκτη είναι:
 - ▣ Selection Combining
 - ▣ Threshold Combining (ή switching diversity)
 - ▣ Maximal Ratio Combining
 - ▣ Equal-Gain Combining
 - ▣ Optimum Combining (AWGN + Interference)
 - ▣ Hybrid Selection / MRC
- **Απαιτείται γνώση του διαύλου στο δέκτη (coherent combining).**

- 1) A. F. Molisch, “Wireless Communications”, IEEE Press, 2005.
- 2) Proakis, “Digital Communications”, 4th Edition, McGraw Hill, 2000.

Διαφορισμός στο Δέκτη

23

- Υποθέτουμε nRx πλήθος κεραιών δέκτη.
- Ο δίαυλος είναι δiάνυσμα με nRx ανεξάρτητους Rayleigh διαύλους (i.i.d. Rayleigh).
- Υποθέτουμε ότι το εκπεμπόμενο σήμα x (με τα σύμβολα προς μετάδοση) έχει μοναδιαία διακύμανση (unit variance).
- Για να μελετήσουμε το διαφορισμό σε πολλές διαφορετικές τιμές E_s/N_o γράφουμε

$$\mathbf{y} = \sqrt{\frac{E_s}{N_o}} \mathbf{h}x + \mathbf{n}$$

Διαφορισμός στο Δέκτη - SC

24

- Υποθέτουμε ως τεχνική συνδυασμού των λαμβανόμενων σημάτων από τους κλάδους διαφορισμού την **Selection Combining (SC)**.
- **SC**: Επίλεξε για αποκωδικοποίηση στο δέκτη το σήμα από τον κλάδο με το μεγαλύτερο SNR.
- Το στιγμιαίο SNR του i -οστού κλάδου είναι

$$\gamma_i = |h_i|^2 \frac{E_s}{N_o} \quad i = 1, \dots, nRx$$

- Άρα επιλέγουμε τον κλάδο με το μέγιστο γ_i .

Διαφορισμός στο Δέκτη - SC

25

- Το μέσο SNR για SC είναι

$$\begin{aligned}\Gamma_{SC} &= E \left\{ \max_i (|h_i|^2) \right\} \frac{E_s}{N_o} \quad i = 1, \dots, nRx \\ &= E \{ \gamma_{SC} \}\end{aligned}$$

- Η μέση τιμή υπολογίζεται σε διαφορετικές υλοποιήσεις του διαύλου.
- Σε περιβάλλον διαλείψεων Rayleigh, το πλάτος του διαύλου ακολουθεί κατανομή Rayleigh, ενώ η στιγμιαία ισχύς $|h_i|^2$ (και άρα και ο λόγος γ_i) ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Διαφορισμός στο Δέκτη - SC

26

- Η πιθανότητα διακοπής της i -οστής ζεύξης είναι

$$P_{out, \gamma_i}(\gamma_s) = P[\gamma_i < \gamma_s] = 1 - \exp\left(-\frac{\gamma_s}{\Gamma}\right)$$

όπου γ_s είναι η τιμή κατωφλίου που ορίζουμε τη διακοπή. Επίσης θεωρούμε ίδια μέση ισχύ σε κάθε κλάδο και

$$\Gamma = \Gamma_i = E \{ \gamma_i \} = E \left\{ |h_i|^2 \right\} \frac{E_s}{N_o} \quad i = 1, \dots, nRx$$

Διαφορισμός στο Δέκτη - SC

27

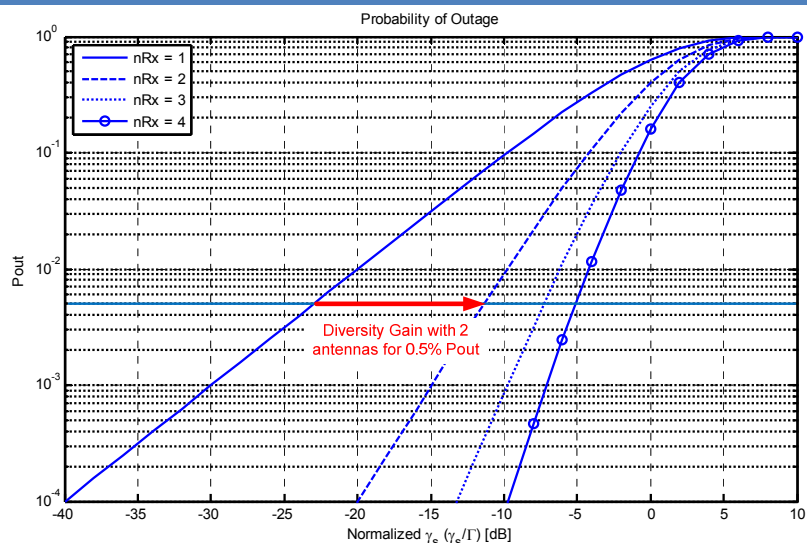
- Η πιθανότητα διακοπής της ζεύξης για nR_x κλάδους είναι

$$\begin{aligned} P_{out}(\gamma_s) &= P[\gamma_{SC} < \gamma_s] = P[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{nR_x} < \gamma_s] \\ &= P[\gamma_1 < \gamma_s] P[\gamma_2 < \gamma_s] \cdots P[\gamma_{nR_x} < \gamma_s] \\ &= \prod_{i=1}^{nR_x} P[\gamma_i < \gamma_s] = \left[1 - \exp\left(-\frac{\gamma_s}{\Gamma}\right) \right]^{nR_x} \end{aligned}$$

- Άρα η πιθανότητα διακοπής (που είναι η c.d.f. του σηματοθορυβικού λόγου στην έξοδο, γ_{SC}) μειώνεται εκθετικά με το πλήθος των κλάδων.

Διαφορισμός στο Δέκτη - SC

28



Διαφορισμός στο Δέκτη - SC

29

- Αποδεικνύεται ότι η p.d.f. του γ_{SC} είναι

$$p(\gamma_{SC}) = \frac{nRx}{\Gamma} \exp\left(-\frac{\gamma_{SC}}{\Gamma}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{\gamma_{SC}}{\Gamma}\right)\right]^{nRx-1}$$

- Άρα υπολογίζουμε τη μέση τιμή του SNR ως εξής

$$\Gamma_{SC} = E\{\gamma_{SC}\} = \int_0^{\infty} \gamma_{SC} p(\gamma_{SC}) d\gamma_{SC} = \Gamma \sum_{i=1}^{nRx} \frac{1}{i}$$

Διαφορισμός στο Δέκτη - SC

30

- Η επίδοση του SC αποτιμάται και σε BER για διαμόρφωση BPSK. Με δεδομένη την δεσμευμένη πιθανότητα σφάλματος δεδομένου του διαύλου ή ισοδύναμα του σηματοθορυβικού λόγου γ_{SC}

$$P[\mathcal{E} | \gamma_{SC}] = Q(\sqrt{2\gamma_{SC}})$$

- Υπολογίζουμε την πιθανότητα σφάλματος ως μέση τιμή ως προς το δίαυλο

Διαφορισμός στο Δέκτη - SC

31

- Δηλαδή

$$p_e = \int_0^{\infty} \mathcal{Q}(\sqrt{2\gamma_{sc}}) \frac{nRx}{\Gamma} e^{\left(\frac{\gamma_{sc}}{\Gamma}\right)} \left[1 - e^{\left(\frac{\gamma_{sc}}{\Gamma}\right)}\right]^{nRx-1} d\gamma_{sc}$$

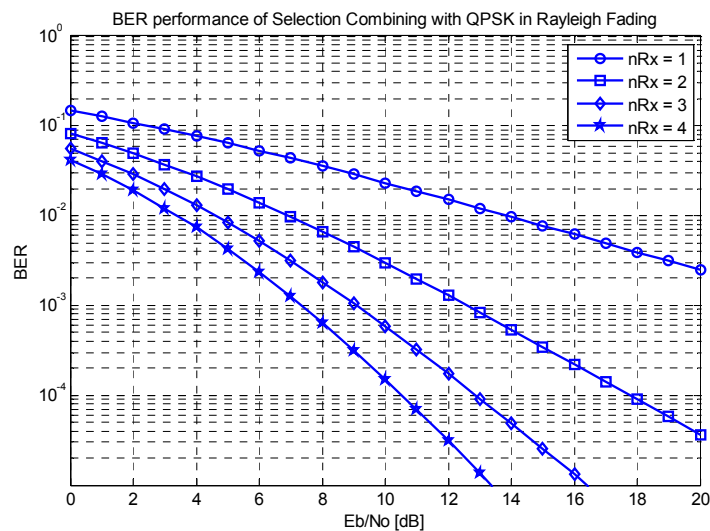
- Ισχύει η ανάπτυξη σε σειρά

$$p_e = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{nRx} (-1)^k \binom{nRx}{k} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Gamma+k}}$$

*E.A. Neasmith and N.C. Beaulieu, "New Results on Selection Diversity",
IEEE Trans. on Comms, Vol.46, No.5, MAY 1998*

Διαφορισμός στο Δέκτη - SC

32



Διαφορισμός στο Δέκτη - MRC

33

- Υποθέτουμε τώρα ως τεχνική συνδυασμού των λαμβανόμενων σημάτων από τους κλάδους διαφορισμού την **Maximal Ratio Combining (MRC)**.
- MRC: Είναι γραμμική τεχνική συνδυασμού: Το τελικό σήμα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός (weighted sum) των διαφόρων σημάτων λήψης.
- Το στιγμιαίο SNR του i -οστού κλάδου είναι

$$\gamma_i = |h_i|^2 \frac{E_s}{N_o} \quad i = 1, \dots, nRx$$

- Σε κάθε κλάδο η τεχνική εφαρμόζει ένα βάρος w_i με στόχο τη μεγιστοποίηση του SNR.

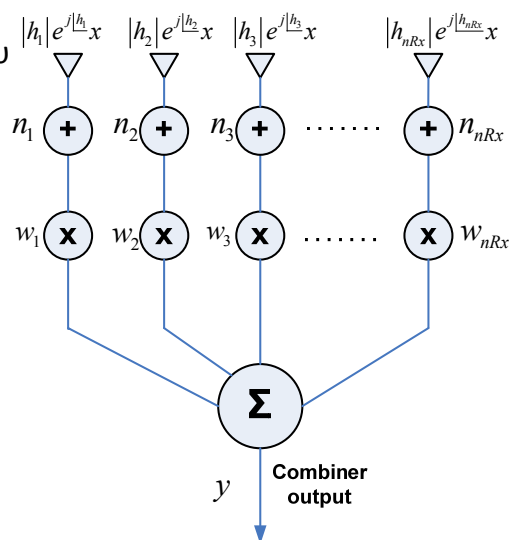
Διαφορισμός στο Δέκτη - MRC

34

- Απαιτείται γνώση της φάσης του σήματος που εισέρχεται σε κάθε branch.
- Η φάση $\vartheta_i = \angle h_i$ του i -οστού κλάδου αφαιρείται πολλαπλασιάζοντας με το συντελεστή:

$$w_i = a_i e^{-j\angle h_i} = a_i e^{-j\vartheta_i}$$

- Για το πλάτος του βάρους θα μιλήσουμε στη συνέχεια.



Διαφορισμός στο Δέκτη - MRC

35

- Η έξοδος του συνδυαστή είναι

$$\begin{aligned}
 y_{MRC} &= \begin{bmatrix} w_1^{MRC} & w_2^{MRC} & \dots & w_{nRx}^{MRC} \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{w}_{MRC}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{nRx} w_i^{MRC} y_i \\
 &= \mathbf{w}_{MRC}^T \left(\sqrt{\frac{E_s}{N_o}} \mathbf{h}x + \mathbf{n} \right) = \sqrt{\frac{E_s}{N_o}} \mathbf{w}_{MRC}^T \mathbf{h}x + \mathbf{w}_{MRC}^T \mathbf{n}
 \end{aligned}$$

- Αποδεικνύεται ότι ο σηματοθροβικός λόγος μεγιστοποιείται αν

$$\mathbf{w}_{MRC} = \mathbf{h}^* \Rightarrow \mathbf{w}_{MRC}^T = \mathbf{h}^H$$

Διαφορισμός στο Δέκτη - MRC

36

- Άρα

$$\gamma_{MRC} = \frac{E_s}{N_o} \|\mathbf{h}\|^2 = \frac{E_s}{N_o} \sum_{i=1}^{nRx} |h_i|^2 = \sum_{i=1}^{nRx} \frac{E_s}{N_o} |h_i|^2 = \sum_{i=1}^{nRx} \gamma_i$$

- Η μέση τιμή του είναι

$$\Gamma_{MRC} = E \{ \gamma_{MRC} \} = E \left\{ \sum_{i=1}^{nRx} \gamma_i \right\} = \sum_{i=1}^{nRx} \Gamma_i = nRx \cdot \Gamma$$

- Άρα προκύπτει ένα **κέρδος ισχύος που καλείται κέρδος συστοιχίας (array gain)** που γίνεται εμφανές στο SNR **επιπλέον του κέρδους διαφορισμού (diversity gain)**.

Διαφορισμός στο Δέκτη - MRC

37

- Η στιγμιαία ισχύς του σήματος είναι

$$\frac{E_s}{N_o} |\mathbf{w}_{MRC}^T \mathbf{h}|^2$$

- Για τη σωστή ανάκτηση στο δέκτη, και ιδιαίτερα για QAM διαμορφώσεις, θα πρέπει η ισχύς του σήματος να παραμείνει ίδια

$$\frac{E_s}{N_o} |\mathbf{w}_{MRC}^T \mathbf{h}|^2 = \frac{E_s}{N_o}$$

- Άρα πρέπει να κανονικοποιήσω τα βάρη ως εξής

$$\mathbf{w}_{MRC} = \frac{\mathbf{h}^*}{\|\mathbf{h}\|^2} \Rightarrow \mathbf{w}_{MRC}^T = \frac{\mathbf{h}^H}{\|\mathbf{h}\|^2} \Rightarrow |\mathbf{w}_{MRC}^T \mathbf{h}|^2 = 1$$

Διαφορισμός στο Δέκτη - MRC

38

- Άρα η έξοδος του συνδυαστή είναι

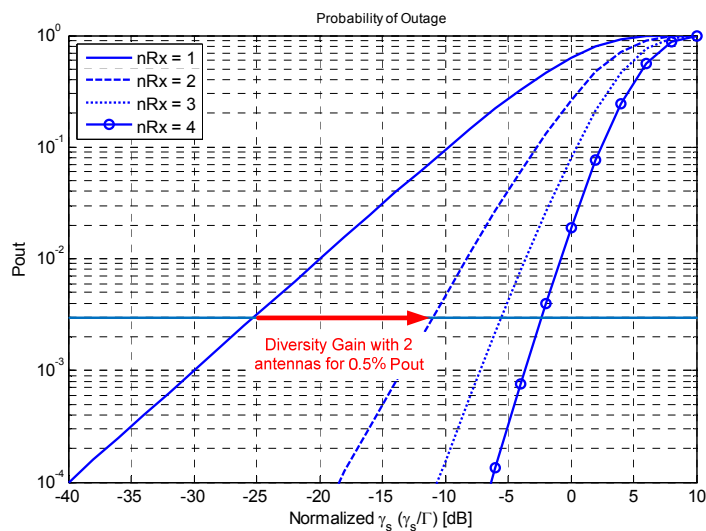
$$y_{MRC} = \sqrt{\frac{E_s}{N_o}} x + \frac{\mathbf{h}^H}{\|\mathbf{h}\|^2} \mathbf{n}$$

- Η πιθανότητα διακοπής αποδεικνύεται ότι είναι

$$P_{out, \gamma_{MRC}}(\gamma_s) = P[\gamma_{MRC} < \gamma_s] = 1 - \exp\left(-\frac{\gamma_s}{\Gamma}\right) \sum_{k=1}^{nR_x} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\gamma_s^{k-1}}{\Gamma^{k-1}}$$

Διαφορισμός στο Δέκτη - MRC

39



Διαφορισμός στο Δέκτη - MRC

40

- Η επίδοση του MRC αποτιμάται και σε BER για διαμόρφωση BPSK. Με δεδομένη την δεσμευμένη πιθανότητα σφάλματος δεδομένου του διαύλου ή ισοδύναμα του σηματοθορυβικού λόγου γ_{MRC}

$$P[\mathcal{E} | \gamma_{MRC}] = Q(\sqrt{2\gamma_{MRC}}) = Q(\sqrt{2\|\mathbf{h}\|^2 \text{SNR}})$$

- Υπολογίζουμε την πιθανότητα σφάλματος ως μέση τιμή ως προς το δίαυλο

Διαφορισμός στο Δέκτη - MRC

41

- Δηλαδή η μέση πιθανότητα σφάλματος είναι

$$p_e = \int_0^{\infty} Q(\sqrt{2\gamma_{MRC}}) \frac{1}{(nR_x - 1)!} \frac{\gamma_{MRC}^{nR_x - 1}}{\Gamma^{nR_x}} \exp\left(-\frac{\gamma_{MRC}}{\Gamma}\right) d\gamma_{MRC}$$

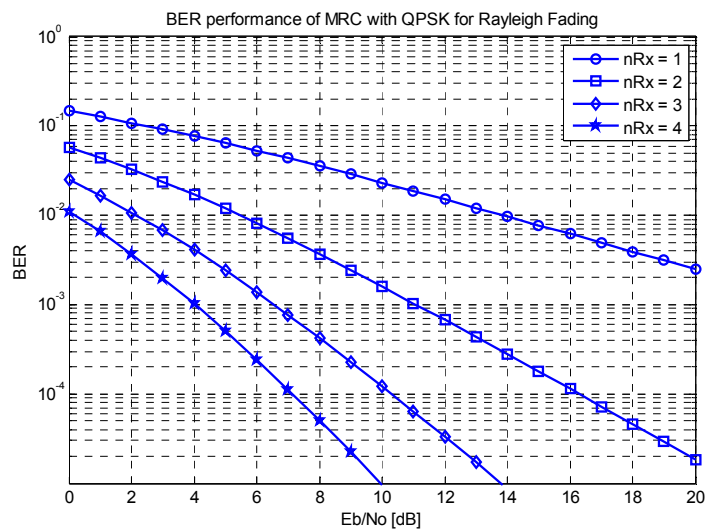
- Ισχύει η ανάπτυξη σε σειρά

$$p_e = \left(\frac{1-\mu}{2}\right)^{nR_x} \sum_{k=0}^{nR_x-1} \binom{nR_x-1+k}{k} \left(\frac{1+\mu}{2}\right)^k$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Gamma+1}}$$

Διαφορισμός στο Δέκτη - MRC

42



Διαφορισμός στο Δέκτη - MRC

43

- Το SNR που συμμετέχει στην πιθανότητα σφάλματος μπορεί να γραφεί

$$\|\mathbf{h}\|^2 \text{SNR} = \left(\frac{1}{n_{Rx}} \|\mathbf{h}\|^2 \right) \cdot (n_{Rx} \cdot \text{SNR})$$

- Ο 1^{ος} όρος είναι το diversity gain ενώ ο 2^{ος} το array gain. Όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των κεραιών στο δέκτη τόσο μεγαλύτερο είναι το αποτέλεσμα της ομοφασικής άθροισης αλλά και τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα σφάλματος λόγω των πολλαπλών ανεξάρτητων μονοπατιών στα οποία υπολογίζεται η μέση τιμή του p_e .

Διαφορισμός στο Δέκτη

44

- **Προσοχή:** Με εφαρμογή διαφορισμού στο δέκτη είναι δυνατό να έχω μόνο κέρδος διαφορισμού και όχι ισχύος, όπως π.χ. στην τεχνική selection combining. Αντίστοιχα, αν έχω συσχετισμένα σήματα δεν προκύπτει κέρδος διαφορισμού αλλά μόνο κέρδος συστοιχίας.
- Ο διαφορισμός με MRC είναι ισοδύναμος με receive beamforming, επειδή ο εξαναγκασμός σε κοινή φάση υπονοεί τη στροφή του διαγράμματος ακτινοβολίας σε συγκεκριμένη κατεύθυνση.

Διαφορισμός στο Δέκτη - EGC

45

- Είναι προφανές ότι στην τεχνική MRC απαιτείται παρακολούθηση του κέρδους του διαύλου, ο οποίος όμως μεταβάλλεται γοργά και με μεγάλες διακυμάνσεις.
- Στην τεχνική EGC αποφεύγουμε τη ρύθμιση του πλάτους και επιδρούμε μόνο στη φάση.

$$w_i = e^{-j\angle h_i} = e^{-j\theta_i} \Rightarrow w_i h_i = |h_i|$$

$$\mathbf{w}_{EGC} = e^{j\arg(\mathbf{h}^*)} \Rightarrow \mathbf{w}_{EGC}^T = e^{j\arg(\mathbf{h}^H)} \Rightarrow \mathbf{w}_{EGC}^T \mathbf{h} = \sum_{i=1}^{nRx} |h_i|$$

Διαφορισμός στο Δέκτη - EGC

46

- Το στιγμιαίο SNR

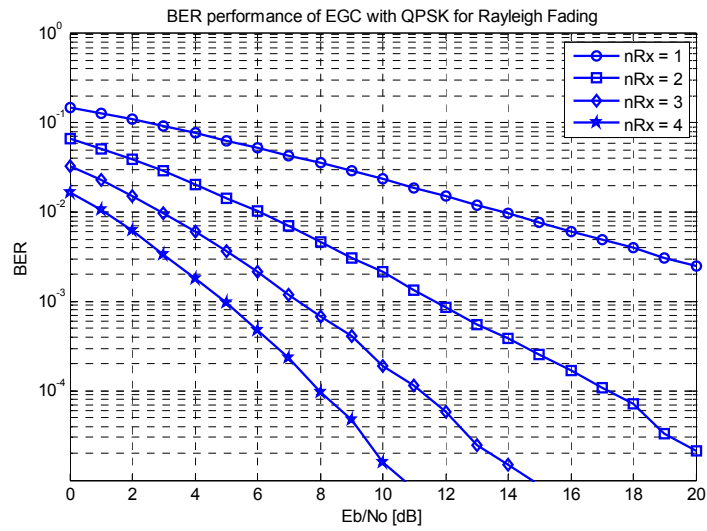
$$\gamma_{EGC} = \frac{E_s}{N_o} \frac{\left(\sum_{i=1}^{nRx} |h_i| \right)^2}{nRx} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{nRx} \sqrt{\gamma_i} \right)^2}{nRx}$$

- Η μέση τιμή είναι

$$\begin{aligned} \Gamma_{EGC} &= E\{\gamma_{EGC}\} = \frac{1}{nRx} \frac{E_s}{N_o} E\left\{ \left(\sum_{i=1}^{nRx} |h_i| \right)^2 \right\} \\ &= \Gamma \left(1 + (nRx - 1) \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Διαφορισμός στο Δέκτη - EGC

47



48

Διαφορισμός στον Πομπό

Διαφορισμός στον Πομπό

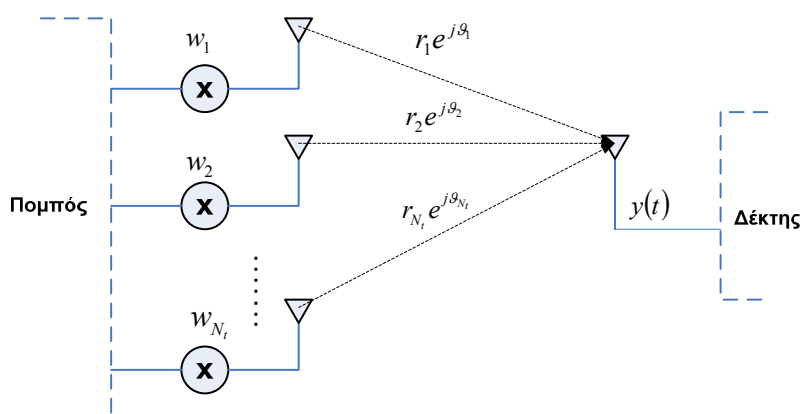
49

- Στον πομπό υπάρχουν πολλές κεραιές και η ισχύς εκπομπής μοιράζεται σε αυτές τις κεραιές.
- Η τεχνική εξαρτάται από το αν το κανάλι είναι γνωστό στον πομπό ή όχι
 - ▣ Αν **το κανάλι είναι γνωστό**, τότε η τεχνική είναι όμοια με το διαφορισμό στο δέκτη. (**Closed Loop Transmit Diversity** ή **Transmit Beamforming** ή **MRT**)
 - ▣ Αν **το κανάλι δεν είναι γνωστό**, τότε απαιτείται υλοποίηση τεχνικών κωδικοποίησης χώρου και χρόνου (**Space-Time Coding**), με πιο γνωστό παράδειγμα την τεχνική **Alamouti**.

Διαφορισμός στον Πομπό

50

- Αναπαράσταση της τεχνικής



Διαφορισμός στον Πομπό - MRT

51

- Ο πομπός γνωρίζει τα path gains $r_i e^{j\theta_i}$ (Channel Side Information at the Tx, CSIT)
- Κάθε κλάδος πολλαπλασιάζεται με ένα μιγαδικό βάρος $w_i = a_i e^{-j\theta_i}$
- Έχω δηλαδή λύση παρόμοια με το MRC
- Η τάξη διαφορισμού είναι ίση με το πλήθος των κεραιών στον πομπό (nTx).

Space-Time Coding

52

- Η χωροχρονική κωδικοποίηση προτάθηκε από τον V. Tarokh(*) το 1998 ως τεχνική βελτίωσης της αξιοπιστίας μιας ζεύξης υπό συνθήκες διαλείψεων.
- Κωδικοποίηση ώστε να **εισαχθεί συσχέτιση** ανάμεσα στα σήματα που μεταδίδονται από:
 - Τις διάφορες κεραιές (στο πεδίο του **χώρου**)
 - Σε διάφορες χρονικές στιγμές (στο πεδίο του **χρόνου**).
- Η συσχέτιση επιτυγχάνεται μέσω της εισαγωγής **πλεονασμού (redundancy)**.

(*) V. Tarokh, N. Seshadri, A.R. Calderbank, "Space-time codes for high data rate wireless communications: Performance criteria and code construction", IEEE Trans. on Inf. Theory, Vol.44, No2, pp.744-765, 1998.

Διαφορισμός στον Πομπό (Alamouti)

53

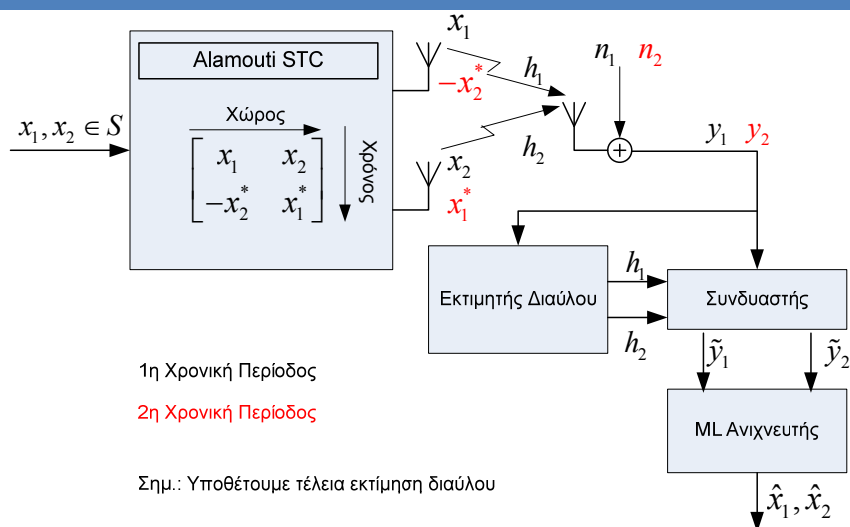
- Μια απλή αλλά πολύ έξυπνη τεχνική διαφορισμού όταν ο διάυλος δεν είναι γνωστός στον πομπό.
- Δεν απαιτεί γνώση του διαύλου στον πομπό.
- Ο διάυλος θεωρείται σταθερός για $2T_s$.
- Τάξη Διαφορισμού: 2
- Κέρδος συστοιχίας: Όχι
- Ο 2x2 χωρο-χρονικός πίνακας μετάδοσης είναι

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2^* & x_1^* \end{bmatrix}$$

(Τα σύμβολα είναι ανεξάρτητα και η μισή ισχύς εκπέμπεται από κάθε κεραία)

Διαφορισμός στον Πομπό (Alamouti)

54



Διαφορισμός στον Πομπό (Alamouti)

55

- Τα λαμβανόμενα σύμβολα σε περίοδο $2T_s$ είναι

$$y_1 = h_1 \cdot x_1 + h_2 \cdot x_2 + n_1$$

$$y_2 = h_1 \cdot (-x_2^*) + h_2 \cdot x_1^* + n_2$$

- και τα αναδιατάσσουμε ως εξής

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1^* \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{n} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}$$

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]^T \quad \mathbf{n} = [n_1 \quad n_2^*]^T$$

Διαφορισμός στον Πομπό (Alamouti)

56

- Στην έξοδο του γραμμικού συνδυαστή στο δέκτη

$$\tilde{y}_1 = (|h_1|^2 + |h_2|^2) \cdot x_1 + h_1^* \cdot n_1 + h_2 \cdot n_2^*$$

$$\tilde{y}_2 = (|h_1|^2 + |h_2|^2) \cdot x_2 - h_1^* \cdot n_2 + h_2^* \cdot n_1$$

- Συνεπώς η ανάκτηση διασπάται σε δύο ορθογώνια βαθμωτά προβλήματα ανάκτησης.
- Το γεγονός αυτό μειώνει πολύ την πολυπλοκότητα υλοποίησης του δέκτη.

Διαφορισμός στον Πομπό (Alamouti)

57

- Ο δέκτης ML αποφασίζει ποιά σύμβολα να επιλέξει με βάση το κριτήριο απόφασης της Ευκλείδειας απόστασης

$$\hat{x}_1 = \arg \min_{x \in S} \left\{ \left| \tilde{y}_1 - (|h_1|^2 + |h_2|^2) \cdot x \right|^2 \right\} = \arg \min_{x \in S} \left\{ d^2 \left(\tilde{y}_1, (|h_1|^2 + |h_2|^2) \cdot x \right) \right\}$$

$$\hat{x}_2 = \arg \min_{x \in S} \left\{ \left| \tilde{y}_2 - (|h_1|^2 + |h_2|^2) \cdot x \right|^2 \right\} = \arg \min_{x \in S} \left\{ d^2 \left(\tilde{y}_2, (|h_1|^2 + |h_2|^2) \cdot x \right) \right\}$$

- Όπου βέβαια

$$d^2(y, x) = (y - x)(y - x)^* = (y - x)(y^* - x^*) = |y - x|^2$$

Διαφορισμός στον Πομπό (Alamouti)

58

- Αποδεικνύεται ότι για σύμφωνη αποδιαμόρφωση η επίδοση της τεχνικής είναι

- BPSK

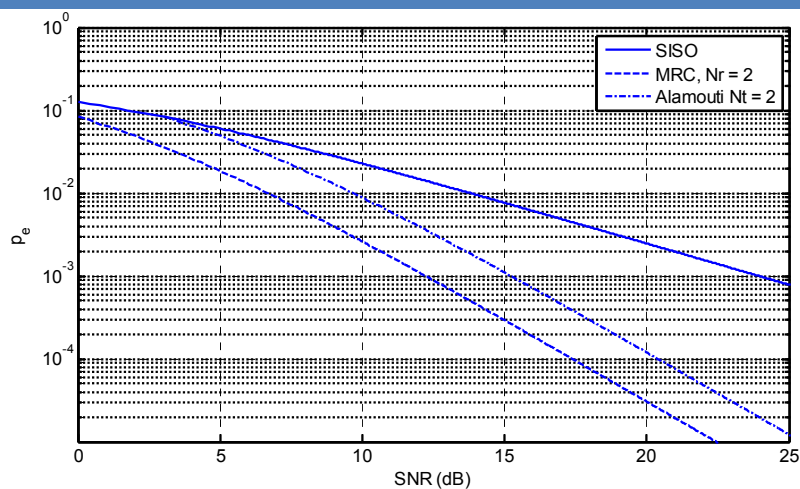
$$p_e = \frac{1}{2} \left[1 - \mu - \frac{1}{2} \mu (1 - \mu^2) \right] \quad \mu = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Gamma + 1}}$$

- QPSK

$$p_e = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\mu}{\sqrt{2 - \mu^2}} - \frac{\mu(1 - \mu^2)}{(2 - \mu^2)\sqrt{2 - \mu^2}} \right] \quad \mu = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Gamma + 1}}$$

Διαφορισμός στον Πομπό (Alamouti)

59



S.M. Alamouti, "A simple transmitter diversity scheme for wireless communication", IEEE JSAC, **16**, pp.1451-1458, 1998.

60

Συστήματα MIMO

Θεμελιωτές

61

- Οι Paulraj και Kailath ήταν οι πρώτοι που μελέτησαν τη δυνατότητα δραματικής αύξησης της χωρητικότητας των συστημάτων MIMO, η οποία μελετήθηκε διεξοδικά στη συνέχεια από τον Telatar και τους Foschini και Gans.

- A. Paulraj and T. Kailath, "Increasing capacity in wireless broadcast systems using distributed transmission/directional reception," US Patent, no.5.345 599, 1994.
- B. I. E. Telatar, "Capacity of multi-antenna gaussian channels," European Transactions on Telecommunications, pp. 585 – 596, Nov. 1999.
- C. G. J. Foschini and M. Gans, "On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas," Wireless Personal Communications, vol. 6, pp. 311–355, 1998.

Θεμελιωτές

62

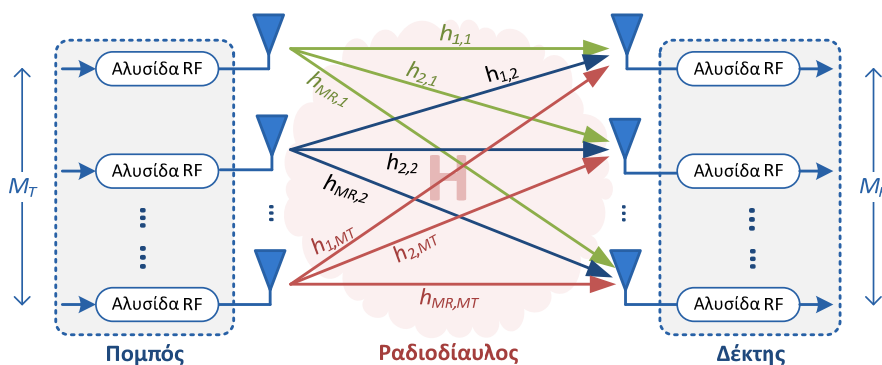
- Ταυτόχρονα, αναπτύχθηκε η αρχιτεκτονική BLAST (D-BLAST, V-BLAST) η οποία υποσχόταν υψηλούς ρυθμούς δεδομένων, ενώ εμφανίστηκαν και οι πρώτες αρχιτεκτονικές κωδικοποίησης χώρου-χρόνου.

- A. G. J. Foschini, "Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multiple antennas", Bell Labs Syst. Tech. J., pp.41-59, Autumn 1996.
- B. P. W. Wolniansky, G. J. Foschini, G. D. Golden, and R. A. Valenzuela, "VBLAST: an architecture for realizing very high data rates over the rich scattering wireless channel," International Symposium on Signals, Systems, and Electronics, ISSSE , pp.295-300, Oct 1998.
- C. V. Tarokh, N. Seshadri and A. Calderbank, "Space-time codes for high data rate wireless communication: performance criteria and code construction", IEEE TIT, no.44, pp.744-765, March 1998.

Συστήματα MIMO

63

Συστήματα MIMO

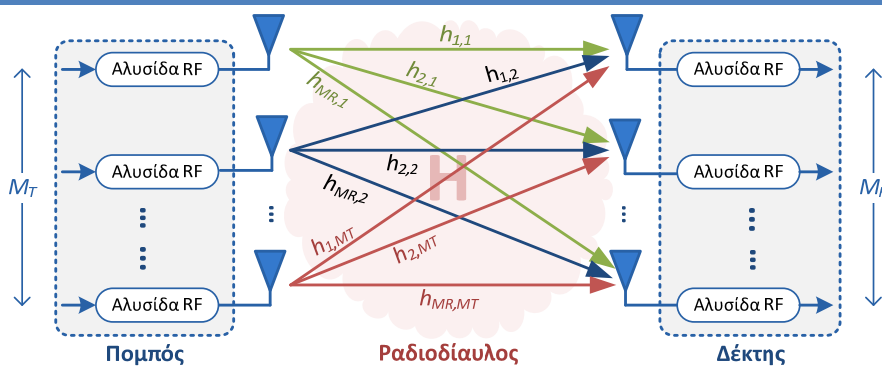


Τα συστήματα MIMO χρησιμοποιούνται κυρίως είτε για αύξηση της **χωρητικότητας** είτε για **βελτίωση της αξιοπιστίας** της μετάδοσης.

Σχέση εισόδων – εξόδων MIMO

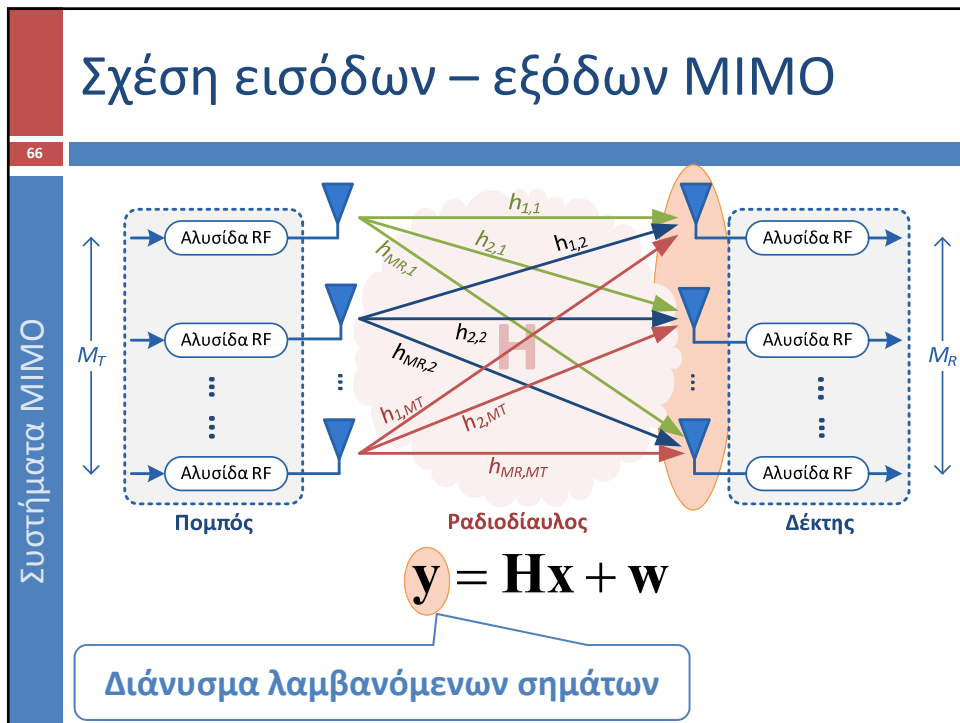
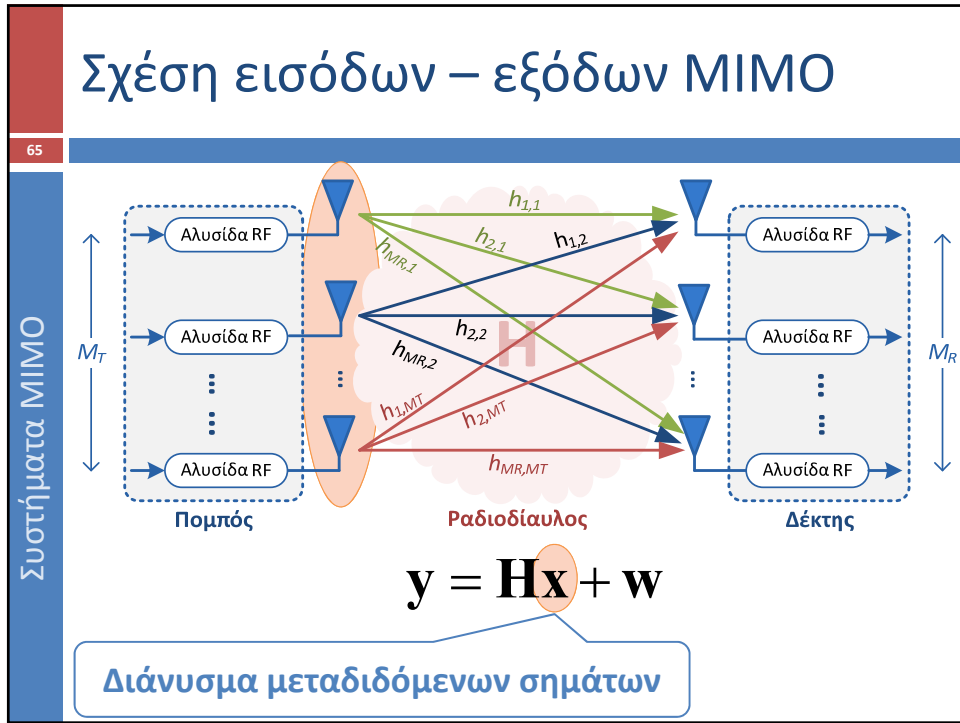
64

Συστήματα MIMO



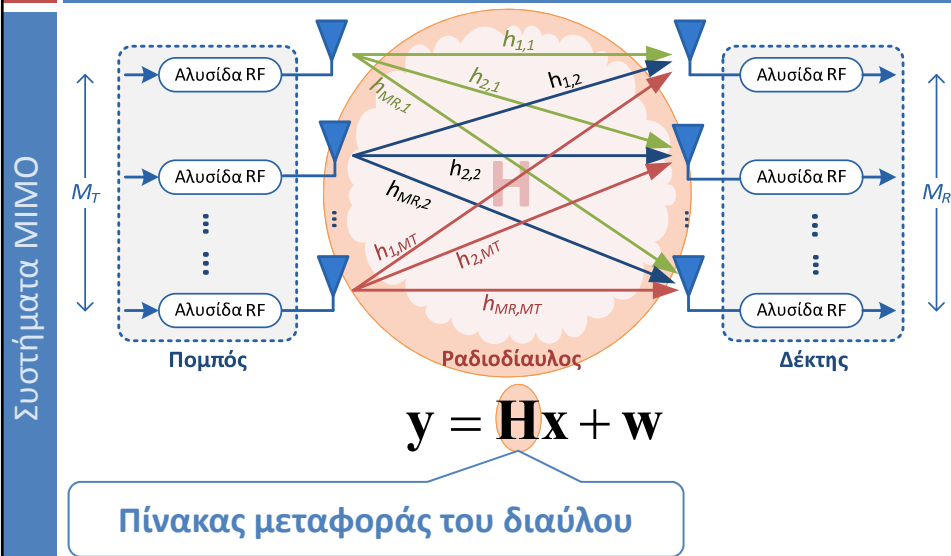
$$y_i[n] = \sum_{j=1}^{N_t} x_j[n] h_{ij} + w_i[n] \quad i = 1, 2, \dots, N_r$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w}$$



Σχέση εισόδων – εξόδων MIMO

67



Σχέση εισόδων – εξόδων MIMO

68

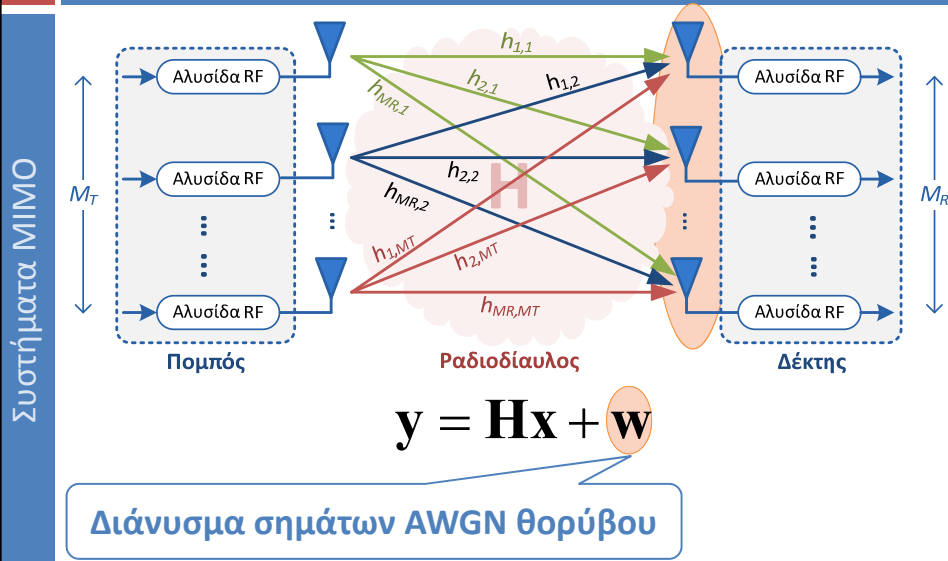
- Θεωρώντας κανάλι με επίπεδες διαλείψεις, ο πίνακας που περιγράφει το δίαυλο καλείται: **Μιγαδικός πίνακας διαύλου (complex channel matrix)** διαστάσεων $(N_r \times N_t)$:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1N_t} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2N_t} \\ \vdots & \vdots & h_{ij} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{N_r,1} & h_{N_r,2} & \dots & h_{N_r,N_t} \end{bmatrix}$$

Μιγαδικό κέρδος καναλιού κατά τη διάδοση ενός συμβόλου από τη j κεραία εκπομπής στην i κεραία λήψης

Σχέση εισόδων – εξόδων MIMO

69



Σχέση εισόδων – εξόδων MIMO

70

- Στο μοντέλο αυτό η ανάκτηση μιας ροής δεδομένων υποφέρει από την παρεμβολή των άλλων ροών

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{N_t} \mathbf{h}_i x_i + \mathbf{w} = \mathbf{h}_k x_k + \sum_{i \neq k} \mathbf{h}_i x_i + \mathbf{w}$$

Interstream-Interference

- Πως όμως είναι δυνατή η μετάδοση και η λήψη από πολλαπλές κεραιές ώστε να έχουμε ισοδύναμο παράλληλους ανεξάρτητους υποδιαύλους?
- Σε αυτό βοηθά η αναπαράσταση σε ένα ισοδύναμο πεδίο που επιτρέπει τη “διάσπαση” δηλ. την ανάλυση του διανυσματικού διαύλου σε παράλληλους, ανεξάρτητους, βαθμωτούς Gauss υπο-διαύλους.

Ανάλυση Ιδιόμορφων Τιμών για MIMO

71

- Έστω ότι για ένα σύστημα MIMO (N_t, N_r) ο πίνακας του διαύλου, \mathbf{H} , είναι γνωστός τόσο στον πομπό όσο και στο δέκτη. Άρα μπορεί να αναλυθεί με χρήση ιδιόμορφων τιμών (**Singular Value Decomposition - SVD**) ως εξής:

$$\mathbf{H} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^H$$

- όπου ο ($N_r \times N_r$) πίνακας \mathbf{U} και ο ($N_t \times N_t$) πίνακας \mathbf{V} είναι ορθομοναδιαίοι, δηλαδή $\mathbf{U}^H \cdot \mathbf{U} = \mathbf{I}_{N_r}$ και $\mathbf{V}^H \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I}_{N_t}$ ενώ ο πίνακας $\mathbf{\Sigma}$ είναι διαγώνιος πίνακας που περιέχει διατεταγμένες σε φθίνουσα σειρά τις **ιδιόμορφες τιμές** του \mathbf{H} .

Ανάλυση Ιδιόμορφων Τιμών για MIMO

72

$$\mathbf{H} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^H = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}^H$$

- Ο πίνακας \mathbf{U} περιέχει τα **left singular vectors** του \mathbf{H} , δηλ. τα ιδιοδιανύσματα (**eigenvectors**) του $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$
- Ο πίνακας \mathbf{V} περιέχει τα **right singular vectors** του \mathbf{H} , δηλ. τα ιδιοδιανύσματα (**eigenvectors**) του $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$
- Η **ιδιόμορφη τιμή** σ_i συνδέεται με i -οστή μεγαλύτερη **ιδιοτιμή** του $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$, ή του $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

Ανάλυση Ιδιόμορφων Τιμών για MIMO

73

- Οι μή μηδενικές ιδιόμορφες τιμές είναι R_H στο πλήθος, όπου R_H η **τάξη (rank)** του πίνακα \mathbf{H} .
- Η τάξη ενός πίνακα δεν μπορεί να υπερβαίνει το πλήθος των γραμμών ή των στηλών του

$$R_{\mathbf{H}} \leq \min(N_t, N_r)$$

- Η ισότητα ισχύει όταν είναι **πλήρους τάξης (full rank)**, πράγμα που ισχύει σε διαύλους με πολλούς σκεδαστές (**rich scattering channel**).
- Άρα ο \mathbf{H} μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα R_H πινάκων τάξης 1

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{R_H} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H$$

Ανάλυση Ιδιόμορφων Τιμών για MIMO

74

- Ορίζουμε τα εξής μετ/σμένα διανύσματα

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{V}^H \mathbf{x} \quad \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{U}^H \mathbf{y} \quad \tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{U}^H \mathbf{w}$$

- Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του συστήματος

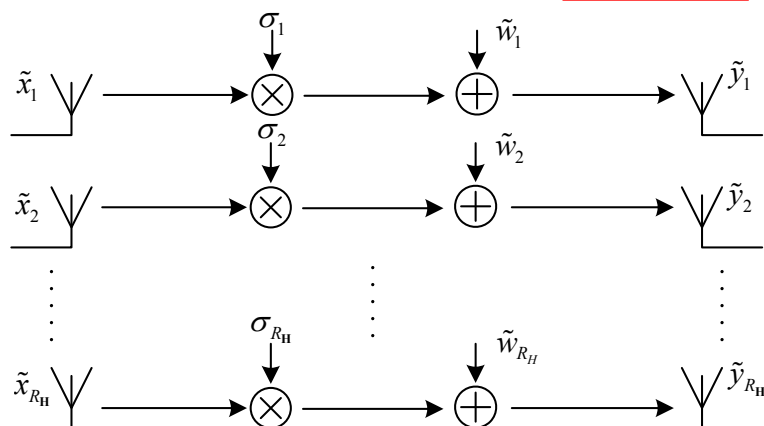
$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{U}^H \mathbf{y} &= \mathbf{U}^H \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{U}^H \mathbf{w} = \mathbf{U}^H \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^H \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{w}} \\ &= \mathbf{\Sigma} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{w}} \end{aligned}$$

- Ο μετ/σμένος θόρυβος ακολουθεί την ίδια κατανομή, με τον αρχικό $\tilde{\mathbf{w}} \sim CN(0, N_o \mathbf{I}_{N_r})$
- Επιπλέον $\|\tilde{\mathbf{x}}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$ και άρα η ενέργεια είναι ίδια.

Ανάλυση σε παράλληλους διαύλους

75

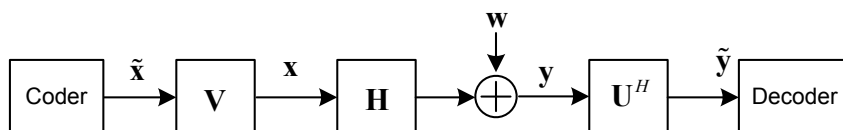
Ο πίνακας Σ είναι διαγώνιος άρα κάθε σήμα εξόδου συνδέεται με ένα και μόνο σήμα εισόδου $\tilde{\mathbf{y}} = \Sigma \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{w}}$



Ανάλυση σε παράλληλους διαύλους

76

- Αν ο δίαυλος είναι πλήρως γνωστός σε πομπό και δέκτη, τότε με χρήση του SVD μπορούμε να σχεδιάσουμε το εξής σύστημα



- Μπορούμε δηλαδή να **εκπέμψουμε (πολυπλέξουμε) ανεξάρτητες ροές δεδομένων στις κατευθύνσεις των ιδιοδιανυσμάτων** του $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$, δηλαδή στο σύστημα συντεταγμένων που ορίζεται από τον πίνακα \mathbf{V} .

Ανάλυση σε παράλληλους διαύλους

77

- Σημειώστε ότι αυτή η βέλτιστη τακτική μετάδοσης εξαρτάται απόλυτα από το δίαυλο. Δηλαδή για να εκπέμπουμε στις κατευθύνσεις των ιδιοδιανυσμάτων του $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$, δηλαδή να πολυπλέξουμε ανεξάρτητες ροές στο σύστημα συντεταγμένων που ορίζεται από τον πίνακα \mathbf{V} , πρέπει να γνωρίζουμε το δίαυλο στον πομπό.
- Στην πράξη δηλαδή η αρχιτεκτονική που δείξαμε αφορά δίαυλο ντετερμινιστικό και χρονικά αμετάβλητο.

Τεχνικές Ανάκτησης για MIMO-SM

78

- Στα συστήματα MIMO χωρικής πολυπλεξίας (SM), ο βέλτιστος δέκτης θα ήταν ο δέκτης Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood).
- Σε σχέση με την τεχνική Alamouti δεν μπορούμε να κάνουμε αποσύνδεση σε δύο προβλήματα ανάκτησης αλλά απαιτείται joint detection.
- Στην πράξη η πολυπλοκότητα της ML ανάκτησης αυξάνει εκθετικά με το πλήθος των κεραιών λήψης.
- Εξαιτίας της εξαντλητικής αναζήτησης της ελάχιστης απόστασης για κάθε πιθανό σύμβολο (όλου του σηματοστερισμού) η πολυπλοκότητα είναι: $M^{n_{Rx}}$.

Ανάκτηση με Δέκτη ML

79

- Με χρήση δέκτη ML αποδεικνύεται ότι η επίδοση ενός MIMO συστήματος 2x2 πλησιάζει αυτή του συστήματος MRC 1x2.
- Η πολυπλοκότητα όμως της τεχνικής, εξαιτίας της εξαντλητικής αναζήτησης της ελάχιστης απόστασης είναι πολύ μεγάλη (για 64QAM και 2 ροές = 64^2).
- Συνεπώς αναζητούνται τεχνικές ανάκτησης μικρότερης πολυπλοκότητας αλλά και υποβέλτιστης επίδοσης.
- Σε αυτές τις τεχνικές ουσιαστικά μειώνεται η τάξη του διαφορισμού, ενώ στο δέκτη ML διατηρείται.

Ανάκτηση με Δέκτη ZF

80

- Ο δέκτης **Zero Forcing (ZF)** είναι ένας γραμμικός δέκτης που προσπαθεί να επιτύχει την αντιστροφή του διαύλου στη σχέση εισόδου-εξόδου

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w}$$

- Ο πίνακας διαύλου \mathbf{H} είναι μιγαδικός πίνακας.
- Ο **Moore-Penrose ψευδοαντίστροφος** πίνακας είναι η ενδεδειγμένη μέθοδος επίλυσης του συστήματος

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{H}^+ \mathbf{y} \quad \mathbf{y} \in \mathbb{C}^m, \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \mathbf{H} \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

Ανάκτηση με Δέκτη ΖF

81

- Θεωρούμε ότι ο \mathbf{H} είναι διάστασης $(m \times n)$
- Αν οι στήλες του \mathbf{H} είναι γραμμικώς ανεξάρτητες (δηλαδή $m \geq n$) τότε υπάρχει ο αντίστροφος του $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ και $\mathbf{H}^+ = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$
- Άρα υπάρχει ο left inverse τ.ω. $\mathbf{H}^+ \mathbf{H} = \mathbf{I}_n$
- Αν οι γραμμές του \mathbf{H} είναι γραμμικώς ανεξάρτητες (δηλαδή $m \leq n$) τότε υπάρχει ο αντίστροφος του $\mathbf{H} \mathbf{H}^H$ και $\mathbf{H}^+ = \mathbf{H}^H (\mathbf{H} \mathbf{H}^H)^{-1}$
- Άρα υπάρχει ο right inverse τ.ω. $\mathbf{H} \mathbf{H}^+ = \mathbf{I}_m$

Ανάκτηση με Δέκτη ΖF

82

- Υπενθυμίζουμε ότι όταν ο πομπός γνωρίζει το δίαυλο, τότε με τον SVD μπορούμε να στείλουμε παράλληλες ροές δεδομένων μέσα από το δίαυλο ώστε να καταφθάσουν στο δέκτη ορθογώνιες και χωρίς παρεμβολές μεταξύ τους.
- Αυτό επιτυγχάνεται με την προ-περιστροφή (pre-rotating) των ροών ώστε οι παράλληλες ροές να σταλούν στους ιδιορυθμούς (eigenmodes) του διαύλου.
- Όταν όμως ο δίαυλος δεν είναι γνωστός στον πομπό αυτό δεν είναι εφικτό. Οι ροές λαμβάνονται στο δέκτη συζευγμένες (cross-coupled) και δεν είναι βέβαιο αν μπορεί να τις διακρίνει επαρκώς.

Ανάκτηση με Δέκτη ZF

83

- Ο δέκτης ZF (αποκαλούμενος και **decorrelator** ή **interference nulling receiver**) προσπαθεί να ακυρώσει την παρεμβολή από τις άλλες ροές.
- Το πετυχαίνει σε δύο βήματα
 - Για την ανάκτηση της k -οστής ροής, προβάλλει το λαμβανόμενο σήμα σε κατεύθυνση που είναι η πιο κοντινή στην \mathbf{h}_k .
 - Στη συνέχεια εφαρμόζει matched-filtering για τη μεγιστοποίηση του SNR.
- Αυτό επιτυγχάνεται σε πολλαπλότητα για όλες τις ροές με τον ψευδοαντίστροφο.

Ανάκτηση με Δέκτη MMSE

84

- Ο δέκτης MMSE χρησιμοποιεί τη γνώση της διασποράς του θορύβου ώστε να μεγιστοποιήσει το λόγο σήματος προς παρεμβολή και θόρυβο (SINR).
- Η ανάκτηση γίνεται χρησιμοποιώντας τον πίνακα

$$\mathbf{W}_{MMSE} = \left(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \sigma_w^2 \mathbf{I}_{nTx} \right)^{-1} \mathbf{H}^H$$

- Άρα

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w} \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \left(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \sigma_w^2 \mathbf{I}_{nTx} \right)^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{w}$$

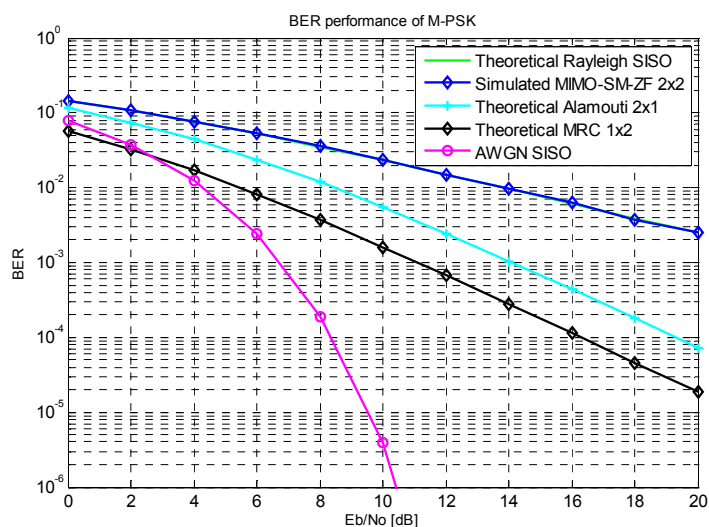
Σύγκριση Δεκτών ZF και MMSE

85

- Στην προσπάθειά του να ακυρώσει την παρεμβολή από τις άλλες ροές, ο ZF αυξάνει την ισχύ του θορύβου
- Η αύξηση στην ισχύ του θορύβου στο δέκτη MMSE είναι μικρότερη από εκείνη στο δέκτη ZF .
- Όταν ο \mathbf{H} έχει την ελάχιστη ιδιοτιμή του πολύ μικρή τότε η αύξηση του θορύβου από το ZF ή το MMSE γίνεται σημαντική.

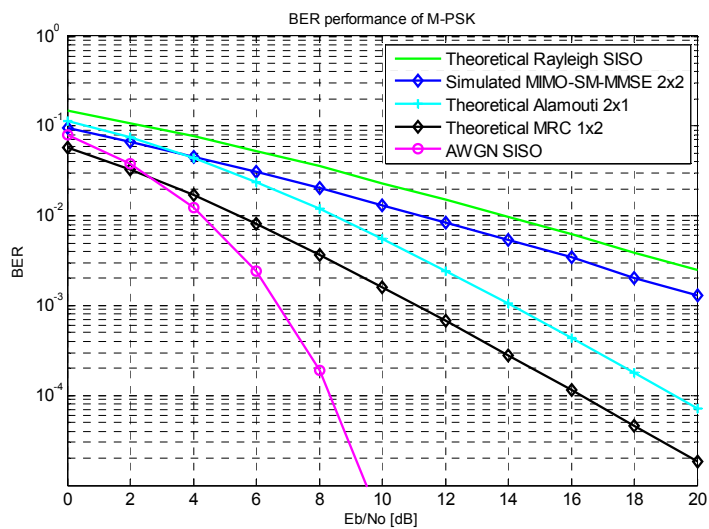
Σύγκριση Δεκτών ZF και MMSE

86



Σύγκριση Δεκτών ZF και MMSE

87



88

Χωρητικότητα

Βασικές εξισώσεις και μεγέθη χωρητικότητας συστημάτων.

Χωρητικότητα SISO για AWGN

89

- **Χωρητικότητα (Capacity):** Ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορεί να επιτευχθεί, με αμελητέα πιθανότητα σφάλματος στο δέκτη.
- Θεωρώντας μοντέλο συστήματος $y = x + n$
 - P είναι ο περιορισμός ισχύος στον πομπό
 - B το εύρος ζώνης του διαύλου και
 - $\sigma_w^2 = N_0 \cdot B$ η μέση ισχύς θορύβου

$$C = B \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P}{\sigma_w^2} \right) \quad (\text{bits / sec})$$

$$= B \cdot \log_2 (1 + \text{SNR})$$

Χωρητικότητα SISO για AWGN

90

- Διαιρώντας με το εύρος ζώνης προκύπτει η **φασματική απόδοση (spectral efficiency)**

$$C = \log_2 (1 + \text{SNR}) \quad (\text{bits / sec / Hz})$$

- Αυτή η συνάρτηση είναι **κοίλη (concave)** αφού

$$f''(\text{SNR}) \leq 0 \quad \forall \text{SNR} \geq 0$$

- δηλαδή όσο μεγαλύτερο είναι το SNR τόσο μικρότερη είναι η αύξηση της φασματικής απόδοσης.
- Σημείωση: Αν ήταν **κυρτή (convex)** θα ίσχυε

$$f''(\text{SNR}) \geq 0 \quad \forall \text{SNR} \geq 0$$

Χωρητικότητα SISO για AWGN

91

□ Επιπλέον

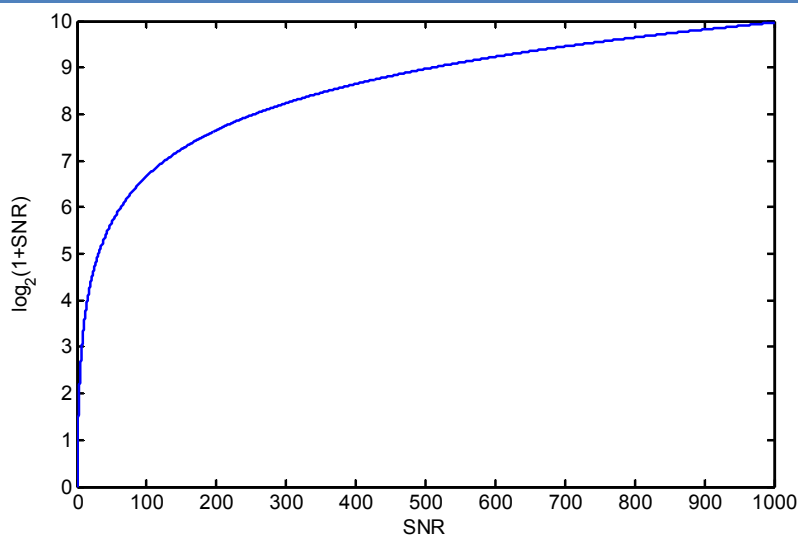
$$\log_2(1+x) \approx x \log_2 e \quad \text{για } x \approx 0$$

$$\log_2(1+x) \approx \log_2 x \quad \text{για } x \gg 1$$

- Άρα για **χαμηλά SNR** η χωρητικότητα αυξάνει **γραμμικά** με τη λαμβανόμενη ισχύ.
- Ενώ για **υψηλά SNR** η χωρητικότητα αυξάνει **λογαριθμικά** με τη λαμβανόμενη ισχύ.
- C.E. Shannon, "A mathematical theory of communication", Bell System Technical Journal, 27, pp.379-423 and 623-656, 1948.
- C.E. Shannon, "Communication in the presence of noise", Proceedings of the IRE, 37, pp.10-21, 1949.

Χωρητικότητα SISO για AWGN

92



Χωρητικότητα SISO για Δίαυλο με Αργές Διαλείψεις

93

- **Αργές Διαλείψεις** : Θεωρούμε ότι ο δίαυλος είναι τυχαίος αλλά παραμένει σταθερός με το χρόνο (τουλάχιστο για τη διάρκεια μιας κωδικής λέξης). Πρακτικά μιλάμε για δίαυλο με αργές διαλείψεις. (Μη-εργοδικό, non ergodic channel)
- Θεωρούμε ότι $y = hx + n$
- Για δεδομένη μια υλοποίηση του διαύλου h η περιγραφή είναι ίδια με εκείνη σε AWGN δίαυλο με λαμβανόμενο SNR πλέον ίσο με $|h|^2$ SNR
- και
$$C = \log_2 \left(1 + |h|^2 \text{SNR} \right) \quad (\text{bps} / \text{Hz})$$

Χωρητικότητα SISO για Δίαυλο με Αργές Διαλείψεις

94

- **Αργές Διαλείψεις** : Αφού ο δίαυλος είναι τυχαίος το ίδιο ισχύει και για τη χωρητικότητα.
- Θεωρούμε ότι ο πομπός κωδικοποιεί με ρυθμό R bps/Hz. Αν ο δίαυλος είναι τ.ω. $\log_2 \left(1 + |h|^2 \text{SNR} \right) < R$ τότε οποιαδήποτε και αν είναι η κωδικοποίηση, η πιθανότητα σφάλματος δεν μπορεί να είναι αυθαίρετα μικρή και το σύστημα είναι σε **διακοπή**.
- Η πιθανότητα διακοπής (**outage probability**) είναι

$$p_{out}(R) = \Pr \left[\log_2 \left(1 + |h|^2 \text{SNR} \right) < R \right]$$

Χωρητικότητα SISO για Δίαυλο με Αργές Διαλείψεις

95

- Να σημειωθεί ότι ενώ σε δίαυλο AWGN μπορούμε να έχουμε μετάδοση με ρυθμό μικρότερο από C διατηρώντας την πιθανότητα σφάλματος όσο μικρή θέλουμε, σε δίαυλο με αργές διαλείψεις αυτό δεν είναι δυνατό όσο η πιθανότητα ο δίαυλος να είναι σε βαθιά διάλειψη είναι μη-μηδενική.
- ε -Outage Capacity : Ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης R τ.ω. η πιθανότητα διακοπής είναι μικρότερη από ε

$$p_{out}(R) < \varepsilon$$

- L. Ozarow, S. Shamai, A.D. Wyner, "Information-theoretic considerations for cellular mobile radio", IEEE TVT, **43**(2), pp.359-378, 1994.

Χωρητικότητα SIMO για Δίαυλο με Αργές Διαλείψεις

96

- Στην περίπτωση που έχουμε διαφορισμό στο δέκτη το λαμβανόμενο SNR είναι $\|\mathbf{h}\|^2 \text{SNR}$
- Η outage capacity είναι αντίστοιχα

$$p_{out}(R) = P \left[\log_2 \left(1 + \|\mathbf{h}\|^2 \text{SNR} \right) < R \right]$$

- A. Goldsmith and P. Varaiya, "Capacity of fading channel with channel side information", IEEE IT, **43**, pp.1986-1992, 1995.

Χωρητικότητα MISO για Δίαυλο με Αργές Διαλείψεις

97

- Στην περίπτωση που έχουμε διαφορισμό στον πομπό με πλήρη γνώση του διαύλου το λαμβανόμενο SNR είναι όπως και στην SIMO περίπτωση $\|\mathbf{h}\|^2$ SNR
- Το ίδιο συμβαίνει με την outage capacity

$$p_{out}(R) = P \left[\log_2 \left(1 + \|\mathbf{h}\|^2 \text{SNR} \right) < R \right]$$

Χωρητικότητα MISO για Δίαυλο με Αργές Διαλείψεις (Alamouti)

98

- Με την τεχνική Alamouti, ο πομπός εκπέμπει σήματα που έχουν ενέργεια σε όλες τις κατευθύνσεις.
- Η εκπομπή μάλιστα είναι ιστροπική γιατί τα σήματα είναι ασυσχέτιστα και έχουν την ίδια ισχύ.
- Όταν έχω γνώση στον Tx η ενέργεια συγκεντρώνεται σε συγκεκριμένη κατεύθυνση (transmit beamforming).
- Η outage capacity για την περίπτωση Alamouti

$$p_{out}(R) = P \left[\log_2 \left(1 + \|\mathbf{h}\|^2 \frac{\text{SNR}}{2} \right) < R \right]$$

Χωρητικότητα SISO για Δίαυλο με Γρήγορες Διαλείψεις

99

- **Γρήγορες Διαλείψεις** : Όταν η κωδική λέξη διαρκεί πολλαπλάσιο μιας περιόδου συνοχής, τότε επιτυγχάνεται χρονικός διαφορισμός και η outage probability βελτιώνεται. Λέμε ότι ο δίαυλος υπόκειται σε γρήγορες διαλείψεις. (ergodic channel)

- Αποδεικνύεται ότι η χωρητικότητα δίνεται από

$$C = E \left\{ \log_2 \left(1 + |h|^2 \text{SNR} \right) \right\} \quad (\text{bps} / \text{Hz})$$

- Άρα μπορούμε να πάρουμε τη μέση τιμή από διαδοχικές ανεξάρτητες διαλείψεις του διαύλου και να χρησιμοποιήσουμε κωδικές λέξεις μεγάλου μήκους (πολλών περιόδων συνοχής) αποδοτικά.

Χωρητικότητα MIMO

100

- Χρησιμοποιώντας την ανάλυση του MIMO διαύλου σε παράλληλους διαύλους εκφράζουμε τη χωρητικότητα του MIMO συστήματος ως άθροισμα των χωρητικοτήτων των επιμέρους διαύλων ως εξής

$$C = B \cdot \sum_{i=1}^{R_H} \log_2 \left(1 + \frac{\lambda_i P_i}{\sigma_w^2} \right) = B \cdot \log_2 \prod_{i=1}^{R_H} \left(1 + \frac{\lambda_i P_i}{\sigma_w^2} \right)$$

- Οι μη μηδενικές ιδιοτιμές των $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ και $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ είναι ίδιες, οι χωρητικότητες των διαύλων με πίνακες \mathbf{H} και \mathbf{H}^H είναι ίδιες. **Οι ιδιοτιμές είναι τα κέρδη ισχύος των επιμέρους διαύλων.**

Χωρητικότητα MIMO

101

- Είναι σαφές ότι **αυξανόμενη της τάξης R_H** του πίνακα **\mathbf{H}** , **αυξάνεται η χωρητικότητα**. Αυτό το κέρδος στη χωρητικότητα καλείται **κέρδος χωρικής πολυπλεξίας (spatial multiplexing gain)**.
- Κάθε ιδιοτιμή αντιστοιχεί σε έναν **ιδιορυθμό (eigenmode)** του διαύλου που καλείται και **ιδιοδιάυλος (eigenchannel)**.
- Υπάρχει όμως κάποια κατανομή των ιδιοτιμών που **μεγιστοποιεί τη χωρητικότητα**?
- Η συνολική ισχύς του διαύλου είναι

$$\sum_{i=1}^{R_H} \lambda_i = \text{tr}[\mathbf{H}\mathbf{H}^H] = \sum_{i,j} |h_{ij}|^2$$

Χωρητικότητα MIMO

102

- **ΝΑΙ**, αποδεικνύεται ότι μεταξύ των διαύλων με το ίδιο κέρδος ισχύος μεγαλύτερη χωρητικότητα έχει ο δίαυλος που οι **ιδιοτιμές** είναι **ίσες**,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{R_H}$$

- Πολλές φορές χρησιμοποιούμε το **condition number** ως μέτρο της ισότητας των ιδιοτιμών

$$\text{Condition Number} = \frac{\max(\lambda_i)}{\min(\lambda_i)}$$

- Όσο πιο κοντά στο 1 τόσο μεγαλύτερη χωρητικότητα.

Χωρητικότητα MIMO

103

- Ποια όμως είναι η βέλτιστη κατανομή ισχύος στους υποδιαύλους?
- Αποδεικνύεται ότι για πολύ υψηλές τιμές του SNR η βέλτιστη λύση είναι να αποδώσουμε ίση ισχύ ανά κεραία εκπομπής (P/N_t)

$$C = B \cdot \sum_{i=1}^{R_H} \log_2 \left(1 + \frac{\lambda_i P}{N_t \sigma_w^2} \right) = B \cdot \log_2 \prod_{i=1}^{R_H} \left(1 + \frac{\lambda_i P}{N_t \sigma_w^2} \right)$$

Χωρητικότητα MIMO

104

- Αν το SNR είναι μικρό, η βέλτιστη τακτική είναι να αποδοθεί η πλήρης ισχύς στον υποδιάυλο με τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή.
- Η χωρητικότητα που προκύπτει είναι

$$C \approx B \cdot \log_2 \left(1 + \frac{\max(\lambda_i) P}{\sigma_w^2} \right) \approx B \frac{P}{\sigma_w^2} \max(\lambda_i)$$

- Δηλαδή ο διάυλος παρέχει κέρδος ισχύος $\max(\lambda_i)$.
- Η τάξη R_H του πίνακα \mathbf{H} , ή ο condition number δεν παίζουν ρόλο. Σημασία έχει η συνολική ισχύς που μεταφέρεται από τον πομπό στο δέκτη.

Χωρητικότητα MIMO

105

- Η βέλτιστη κατανομή ισχύος για ενδιάμεσες τιμές του SNR δίνεται από τον αλγόριθμο *waterpouring* (ή *waterfilling*).
- Η εφαρμογή του αλγορίθμου αυτού υποδεικνύει ότι η κατανομή της συνολικής εκπεμπόμενης ισχύος του σήματος στους ασύρματους διαύλους, γίνεται με τρόπο ώστε στους διαύλους με καλύτερα χαρακτηριστικά διάδοσης να ανατίθεται περισσότερη ισχύς και αντίστοιχα λιγότερη ισχύς στους διαύλους με δυσμενέστερες συνθήκες διάδοσης.

Δίαυλος Άγνωστος στον Πομπό

106

- Η χωρητικότητα τώρα είναι

$$C = \begin{cases} B \cdot \log_2 \left[\det \left(\mathbf{I}_{N_r} + \frac{P}{N_t \sigma_w^2} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \right], & N_r < N_t \\ B \cdot \log_2 \left[\det \left(\mathbf{I}_{N_t} + \frac{P}{N_t \sigma_w^2} \mathbf{H}^H \mathbf{H} \right) \right], & N_r > N_t \end{cases}$$

- G.J. Foschini, "Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multi-element antennas", Bell Labs Technical Journal, **1**(2), pp.41-59, 1996.
- E. Telatar, "Capacity of the multiple antenna Gaussian channel", European Transactions on Telecommunications, vol.10, no.6, pp.585-595, 1999.

Τυχαίος Δίαυλος – Rayleigh Fading

107

- Αφού ο δίαυλος είναι τυχαίος, τυχαίες είναι και οι ιδιοτιμές αλλά και η χωρητικότητα.
- Πλέον έχουν νόημα δύο διαφορετικές εκφράσεις της χωρητικότητας ανάλογα με το αν έχω αργές ή γρήγορες διαλείψεις.
- **Εργοδική Χωρητικότητα (Ergodic Capacity)**: είναι ο μέσος ρυθμός πληροφορίας και αφορά διαύλους με γρήγορες διαλείψεις (εργοδικούς διαύλους).
- **ϵ -Outage Capacity** : Είναι η ελάχιστη χωρητικότητα που μπορεί να υποστηρίξει το κανάλι με πιθανότητα $(100-\epsilon)\%$ και αφορά διαύλους με αργές διαλείψεις (μη-εργοδικούς διαύλους).

Τυχαίος Δίαυλος – Γρήγορες Διαλείψεις

108

- Η εργοδική χωρητικότητα υπολογίζεται ως εξής

$$C_{erg} = E \left\{ B \cdot \log_2 \det \left(\mathbf{I}_{N_r} + \frac{P}{N_t \sigma_w^2} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \right\}, \quad N_r < N_t$$

$$C_{erg} = E \left\{ B \cdot \log_2 \det \left(\mathbf{I}_{N_t} + \frac{P}{N_t \sigma^2} \mathbf{H}^H \mathbf{H} \right) \right\}, \quad N_r > N_t$$

$$C_{erg} = E \left\{ B \cdot \sum_{i=1}^{R_H} \log_2 \left(1 + \frac{\lambda_i P}{N_t \sigma_w^2} \right) \right\}$$

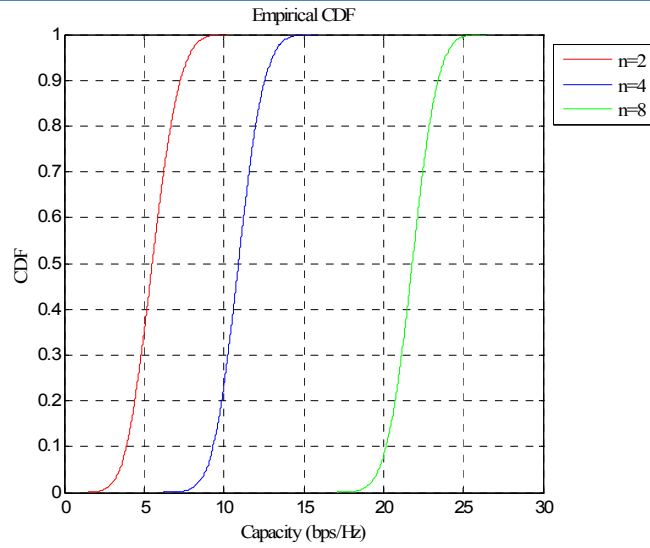
G.J. Foschini and M.J. Gans, "On limits of wireless communication in a fading environment when using multiple antennas", *Wireless Personal Communications*, **6**(3), pp.311-335, 1998.

Τυχαίος Δίαυλος – Rayleigh Fading

109

Θεωρούμε
 $N_r = N_t = n$

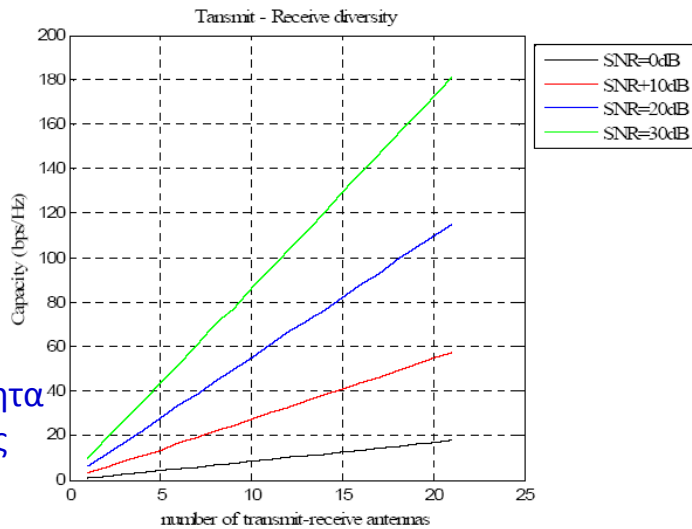
CDF για
 SNR=10dB



Τυχαίος Δίαυλος – Rayleigh Fading

110

Εργοδική
 χωρητικότητα
 vs πλήθος
 κεραιών



Ο Δίαυλος και η Χωρητικότητα

111

- Η τάξη του πίνακα $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$, εκτός από το πλήθος των κεραιών N_t, N_r , περιορίζεται και από το πλήθος των διακριτών πολυδιαδρομικών συνιστωσών N_S

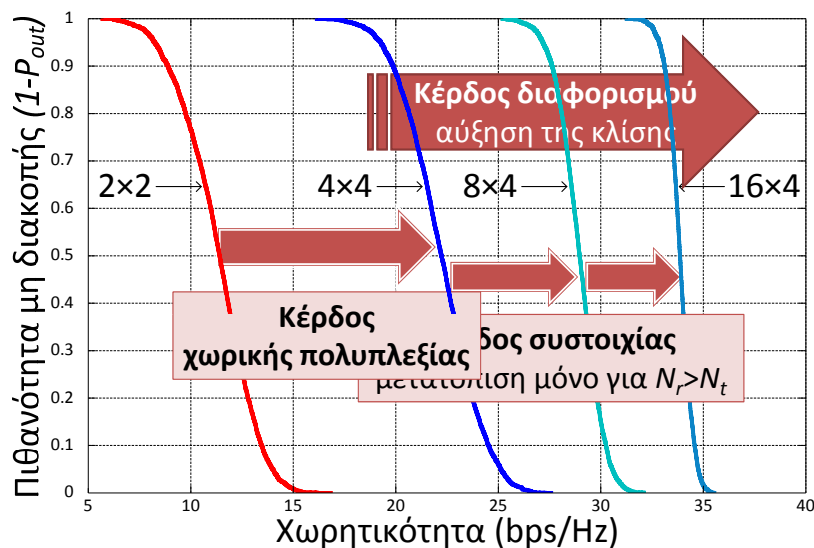
$$R_{\mathbf{H}} \leq \min(N_t, N_r, N_S) = \text{multiplexing gain}$$

- Άρα και η χωρητικότητα, όπως και το κέρδος χωρικής πολυπλεξίας εξαρτάται από την τάξη του πίνακα.
- Άρα το περιβάλλον είναι ο περιοριστικός παράγοντας (μέσω των σκεδαστών και της συσχέτισης που δίνουν)
- Άρα **δεν υπάρχει λόγος για χρήση περισσότερων κεραιών απ'τους βαθμούς ελευθερίας του διαύλου.**

Σύνδεση χωρητικότητας με τα κέρδη των συστημάτων MIMO

112

Συστήματα MIMO



113

Ευχαριστώ για την προσοχή σας

Αθανάσιος Κανάτας
Αναπληρωτής Καθηγητής
Πανεπιστήμιο Πειραιώς
Τηλ: +30 210 4142759
e-mail: kanatas@unipi.gr